معادله اینشتین در حضور ماده

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۹ دی ۱۴۰۳

۱ مقدمه

برای آنکه معادله میدان را در حضور ماده بنویسیم، اولین چیزی که به ذهن می رسد این است که معادله $R_{\mu\nu}=0$ را به معادله ای مثل

$$R_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu} \tag{۱}$$

تعمیم دهیم که در آن $T_{\mu\nu}$ تانسوری است که وابسته به جرم و انرژی ماده است و κ ثابتی است که نشان دهنده میزان تاثیر ماده برای تولید گرانش یا همان انحناست. از همین حدس و گمان شروع می کنیم و به تدریج پیش می رویم. اولین کار این است که چنین تانسوری را تعریف کنیم و خواص آن را بفهمیم. به تدریج که پیش می رویم خواهیم دید که طرف اول این معادله نیز می بایست تغییر کند. در پایان این درس به معادله نهایی گرانش می رسیم که به شکل زیر است:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{۲}$$

بنابراین در این درس نخست با تانسور $T_{\mu\nu}$ که تانسور انرژی ماده [۱] نامیده می شود، آشنا می شویم و سپس یاد خواهیم گرفت که چرا طرف اول معادله نیز می بایست تغییر کند و سرانجام مقدار ضریب ثابت را پیدا می کنیم.

[۱] The material energy tensor

۱.۱ تانسور انرژی ماده

ذره ای به جرم سکون m در نظر بگیرید که با سرعت ویژه $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ حرکت می کند. [۲] در این رابطه τ زمان ویژه یا همان زمان همراه ذره است که یک اسکالر است و در تمامی چارچوب ها مقدار یکسانی دارد. در این صورت $P^\mu = mu^\mu$ یک بردار و $T^{\mu\nu} = mu^\mu u^\nu$ یک تانسور است. اگر بخواهیم این تانسور را برای یک توزیع پیوسته یا یک سیال از ماده تعمیم دهیم ناگزیر می بایست آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \tag{۳}$$

از آنجا که $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ است، داریم

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{d\tau^2} = c^2. \tag{۴}$$

در نتیجه

$$T^\mu{}_\mu = \rho c^2. \tag{۵}$$

البته به یک نکته مهم باید توجه کنیم و آن اینکه در حقیقت $T^{\mu\nu}$ یک تانسور به معنای دقیق کلمه نیست چرا که چگالی یعنی ρ یک اسکالر نیست. (در چارچوب های مختلف حجم تغییر می کند و به همین دلیل چگالی تغییر می کند.) به این موضوع در ادامه درس خواهیم پرداخت. اما فعلا جریان بحث را به خاطر این نکته متوقف یا منحرف نمی کنیم. در ادامه درس هم چنین نشان خواهیم داد که این تانسور دارای خاصیت زیر است:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{۶}$$

به عبارت دیگر دیورژانس این تانسور برابر با صفر است. این تنها تانسور رتبه دویی است که می توانیم در طرف راست معادله اینشتین قرار دهیم. اما اگر چنین کنیم، می بایست طرف چپ این معادله نیز تانسوری با دیورژانس صفر قرار دهیم. خوشبختانه چنین تانسوری را از درسهای قبل یاد گرفته ایم: این تانسور تانسور اینشتین است که به صورت

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \tag{۷}$$

[۲] از این به بعد m_0 برای نمایش جرم سکون استفاده نمی کنیم. مدتی است که این نوع نمادگذاری کمتر به کار می رود و معمولا منظور از m همان جرم سکون است.

تعریف می شود و در رابطه $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ صدق می کند. بنابراین معادله میدان را در حضور ماده به صورت زیر می نویسیم

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}. \tag{۸}$$

که در آن κ ثابتی است که باید تعیین شود.

۲ تعیین ثابت κ

حال می بایست ثابت k را تعیین کنیم. نخست از طرفین معادله (۸) رد می گیریم و به رابطه زیر می رسیم:

$$R - 2R = \kappa T^{\mu}{}_{\mu} \tag{۹}$$

و یا با توجه به اینکه نشان دادیم $T^{\mu}{}_{\mu} = \rho c^2$،

$$R = -\kappa\rho c^2. \tag{۱۰}$$

بنابراین معادله (۸) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$R^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}g^{\mu\nu}\rho c^2 = \kappa\rho u^{\mu}u^{\nu} \tag{۱۱}$$

یا با پایین آوردن اندیس ها در دو طرف و جابجایی جملات

$$R_{\mu\nu} = \kappa\rho(u_{\mu}u_{\nu} - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}c^2) \tag{۱۲}$$

تا اینجا، این معادله برای همه مواردی که تانسور ماده انرژی ناشی از یک سیال یکنواخت بدون بار الکتریکی است صادق است. حال برای تعیین ثابت κ کافی است به یکی از مولفه های دو طرف مثلا مولفه 00 یا

$$R_{00} = \kappa\rho(u_0u_0 - g_{00}\frac{1}{2}c^2) \tag{۱۳}$$

در حد میدان های ضعیف نگاه کنیم. در درس قبل (معادله میدان در خلاء) نشان دادیم که در میدان های ضعیف و ایستا (که با زمان متغیر نیستند)

$$g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2} \tag{۱۴}$$

و

$$R_{00} = -\frac{1}{c^2}\nabla^2\phi. \qquad (۱۵)$$

هم چنین می دانیم که $u_0u_0 = c^2$. با قراردادن این جملات در رابطه (۱۲) و صرف نظر کردن از جملات رتبه دوم به رابطه زیر می رسیم:

$$-\frac{1}{c^2}\nabla^2\phi = \kappa\rho\frac{c^2}{2} \qquad (۱۶)$$

مقایسه این رابطه با معادله گرانش نیوتنی یعنی

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho, \qquad (۱۷)$$

مقدار κ را مشخص می کند:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \qquad (۱۸)$$

بنابراین معادله میدان گرانش نسبیتی در حضور ماده به صورت نهایی زیر در می آید:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.} \qquad (۱۹)$$

این معادله نشان می دهد که ماده چگونه در فضا زمان انحنا ایجاد می کند. معادله ژئودزی نیز نشان می دهد که ماده چگونه در فضازمان خمیده حرکت می کند. طبیعتا توصیف حرکت سیارات در منظومه شمسی با حل دقیق این معادلات که به هم تافته و غیرخطی هستند، بسیار سخت است. خوشبختانه برای بسیاری از پدیده ها نظیر حرکت سیارات در منظومه شمسی، استفاده از این معادلات لازم نیست، و همان گرانش نیوتنی می تواند با دقت خوبی این پدیده ها را توصیف کند. اما در شرایط خاص، نتایجی که با حل معادلات گرانش نیوتن حاصل می شوند تطابق خیلی دقیقی با نتایج مشاهدات ندارند. این شرایط وقتی حاصل می شوند که یا سرعت حرکت سیارات خیلی زیاد است یا اینکه می خواهیم میدان را در جایی خیلی به خورشید یا ستاره مرکزی (خورشید یا ستاره نوترونی) تعیین کنیم. در چنین شرایطی حل این معادلات، اگرچه با زحمت خیلی بیشتر از گرانش نیوتنی، باعث تطابق خیلی دقیقی بین مشاهده و نظریه می شود که نشان دهنده درستی توصیف اینشتین از گرانش است. در درس آینده به این پدیده ها خواهیم پرداخت. البته پدیده های بسیار مهم دیگری نیز وجود دارند که تقریبا می توان آنها را محصول منحصر به فرد گرانش اینشتین دانست، یکی از این

پدیده ها سیاهچاله است که در درس های آینده به آن خواهیم پرداخت. اما اکنون وقت آن است که در باره تانسور ماده انرژی بیشتر بحث کنیم.

۱.۲ چگالی های تانسوری

تا کنون با اسکالرها و بردارها و تانسورها آشنا شده ایم. این ها اشیایی هستند که تحت تبدیل مختصات، مولفه های آنها به شکل معینی تغییر می کنند. نکته مهم این است که این تبدیلات نقطه به نقطه تغییر می کنند و در نتیجه رابطه تبدیل مختصات یک تانسور نیز نقطه به نقطه تغییر می کند. حال فرض کنید که S یک میدان اسکالر است. سوال این است که آیا انتگرال این میدان اسکالر روی خمینه هم به شکل $\int_M Sd^4x = \int_M Sdx^0dx^1dx^2dx^3$ یک کمیت خوش تعریف هست یا نه؟ در واقع اگر $T^{\mu\nu}(x)$ یک تانسور باشد، به این معناست که مولفه های آن به صورت زیر تبدیل می شوند

$$T^{\mu'\nu'}(x) = \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\mid_x \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\mid_x T^{\mu\nu} \qquad (۲۰)$$

و می دانیم که مشتقات موجود در این رابطه نیز بستگی به نقطه مورد نظر دارند. به همین دلیل مجموع دو تانسور در دو نقطه مختلف یعنی $T^{\mu\nu}(x_1) + T^{\mu\nu}(x_2)$ دیگر یک تانسور نیست. همین موضوع در مورد اسکالرها و بردارها نیز صدق می کند. اما در بسیاری از جاها ما احتیاج به محاسبه مجموع تانسورها یا حتی انتگرال تانسورها روی یک خمینه داریم؟ سوال این است که در این موارد چه باید بکنیم؟ پاسخ اش این است که می بایست چیزی تعریف کنیم که به آن چگالی تانسور می گوییم. چگالی تانسورها را می توان در نقاط مختلف با هم جمع کرد و یا از آنها انتگرال گرفت. نخست باید ببینیم وقتی که مختصات را تغییر می دهیم، المان حجم درون انتگرال چگونه تغییر می کند. می دانیم که رابطه زیر بین المان های حجم در دو مختصات متفاوت برقرار است:

$$dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'} = Jdx^0dx^1dx^2dx^3 \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$J = Det(J^{\mu'}_{\mu}) = Det(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}) \qquad (۲۲)$$

جاکوبی تبدیل نام دارد. بنابراین هرکسی بسته به مختصاتی که انتخاب می کند مقداری برای این انتگرال حساب می کند و هیچکدام از این انتگرال ها با هم مساوی نیستند. برای آنکه یک انتگرال خوش تعریف و مستقل از مختصات داشته باشیم می بایست یک اندازه حجم تعریف کنیم که در

مختصات مختلف یکسان باشد. برای این کار به تبدیل متریک توجه می کنیم. می دانیم که متریک به صورت زیر تبدیل می شود

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu',\nu'} \quad (۲۳)$$

این رابطه را می توانیم به صورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$[g] = [J][g'][J]^T \quad (۲۴)$$

که در آن منظور از $[g]$ ماتریس متریک است. با محاسبه دترمینان دو طرف و توجه به این که دترمینان ماتریس J با دترمینان ترانهاده آن یکی است، و با استفاده از نماد خلاصه $g = det([g])$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'} \quad (۲۵)$$

به این ترتیب به یک تساوی مهم می رسیم و آن اینکه اگر چه $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$ و $\sqrt{-g}$ هیچکدام اسکالر نیستند، اما ترکیب آنها به صورت $\sqrt{-g}d^4x$ یک اسکالر است. در نتیجه می توان از توابع اسکالر به صورت زیر انتگرال گرفت و انتگرال حاصل یک اسکالر است:

$$\int S\sqrt{-g}d^4x = \int S(\sqrt{-g'}J)J^{-1}d^4x' = \int S'\sqrt{-g'}d^4x'. \quad (۲۶)$$

کمیت $S\sqrt{-g}$ یک چگالی اسکالر [۳] نامیده می شود. به طریق مشابه می توان انتگرال چگالی تانسور ها را به صورت زیر تعریف کرد

$$\int T^{\mu\nu}\sqrt{-g} \quad (۲۷)$$

اگر چه حاصل انتگرال آنها تنها وقتی که ناحیه انتگرال گیری بسیار کوچک است، یک تانسور خواهد بود. زیرا تانسورها را در نقاط می ختلف نمی توان با هم جمع کرد. در این درس و درس های آینده از کمیت $\sqrt{-g}$ زیاد استفاده خواهیم کرد، بنابراین سعی می کنیم که بهتر آن را بشناسیم. از این به بعد از یک نمادگذاری استفاده می کنیم که دیراک در کتاب خود [۴] آن را معرفی کرده است. در این نمادگذاری به دلیل کثرت استفاده از $\sqrt{g}$ آن را فقط با $\surd$ نمایش می دهیم. این نمادگذاری مثل همه پیشنهادهای دیگر دیراک فوق العاده صرفه جویانه و مفید است.

---

[۳] Scalar Density

[۴] P.A.M. Dirac, General Theory of Relativity, Wiley,1975

۳ چند رابطه مفید د رباره دترمینان متریک

حال که به اهمیت $\sqrt{g} \equiv \surd$ پی برده ایم، بهتر است که برای استفاده های آینده چند رابطه مفید در مورد آن را بررسی کنیم. نخست توجه می کنیم که با توجه به رابطه ساده $dX^{1/2} = 1/2X^{-1/2}dX$ در باره مشتق ها، داریم

$$(\surd)_{,\nu} = \frac{1}{2}\frac{1}{\surd}g_{,\nu}. \qquad (۲۸)$$

حال چند رابطه مفید را بدست می آوریم. برای استخراج بعضی از این روابط هم بد نیست که رابطه علایم کریستوفل را با متریک به یاد بیاوریم:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\big(- g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta}\big). \qquad (۲۹)$$

این رابطه به وضوح نشان می دهد که

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \Gamma_{\alpha\mu\beta}.$$

- **رابطه یک:**

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \qquad (۳۰)$$

- **اثبات:** می دانیم که

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\beta} = \delta^{\mu}_{\beta} \qquad (۳۱)$$

از آنجا که مشتق δ^{μ}_{β} صفر است با مشتق گیری از طرفین می رسیم به

$$\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\beta} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\beta} = 0. \qquad (۳۲)$$

اگر طرفین را در $g^{\beta\alpha}$ ضرب کنیم و اندیس ها را دوباره نامگذاری کنیم به رابطه خواسته شده می رسیم. طبیعی است که این رابطه را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\partial_{\sigma}g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}. \qquad (۳۳)$$

- **رابطه دو:** اگر دترمینان متریک را با g نشان دهیم، آنگاه:

$$\delta g = gg^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \qquad (۳۴)$$

■ **اثبات:** اگر ماتریس $[g]$ را قطری کنیم می توانیم در آن پایه بنویسیم:

$$g = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{۳۵}$$

که در آن λ_i ها ویژه مقدارهای ماتریس متریک هستند. اگر وردش طرفین را حساب کنیم و بر g تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$g^{-1}\delta g = \frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\delta\lambda_2}{\lambda_2} + \cdots \frac{\delta\lambda_n}{\lambda_n} \tag{۳۶}$$

اما طرف راست چیزی نیست جز ردّ ماتریس $[g]^{-1}\delta[g]$ که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$Tr([g]^{-1}\delta[g]) = g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu}.$$

با ترکیب این رابطه و رابطه قبلی به نتیجه زیر می رسیم:

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu}. \tag{۳۷}$$

از آنجا که ما بیشتر به $\sqrt{g}$ یا همان $\surd$ احتیاج داریم، می توانیم با ترکیب این رابطه و رابطه قبلی به نتیجه زیر برسیم:

$$\delta\surd = \frac{1}{2}\surd\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{۳۸}$$

طبیعی است که این رابطه را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\partial_\mu\surd = \frac{1}{2}\surd\, g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}. \tag{۳۹}$$

■ **رابطه سه:**

$$\surd_{,\nu} = \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\surd. \tag{۴۰}$$

اثبات: می دانیم که علائم کریستوفل به صورت زیر هستند:

$$\Gamma_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}\big(- g_{\beta\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\alpha,\nu}\big). \tag{۴۱}$$

این رابطه به خوبی تقارن این علائم را نسبت به دو اندیس آخر نشان می دهد. اما نسبت به دو اندیس اول این علایم متقارن نیستند. اگر جای این دو اندیس را عوض کنیم و یک بار دیگر این رابطه را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\Gamma_{\beta\alpha\nu} = \frac{1}{2}\big(- g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} + g_{\alpha\beta,\nu}\big). \tag{۴۲}$$

اگر این دو رابطه را با هم جمع کنیم بدست می آوریم:

$$g_{\alpha\beta,\nu} = \Gamma_{\alpha\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha\nu}. \tag{۴۳}$$

با توجه به رابطه دومّی که ثابت کردیم به نتیجه زیر می رسیم:

$$\sqrt{\ }_{,\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{\ }\, g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{\ }\; g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\mu} + \Gamma_{\beta\alpha\mu}) = \sqrt{\ }\, g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \sqrt{\ }\; \Gamma^{\beta}{}_{\beta\nu} \tag{۴۴}$$

که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$g^{\beta\nu}{}_{,\alpha} = -(\Gamma^{\beta\nu}{}_{\alpha} + \Gamma^{\nu\beta}{}_{\alpha}). \tag{۴۵}$$

■ **رابطه چهار:**

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu} = -\Gamma^{\mu\nu}{}_{\nu}\sqrt{\ }. \tag{۴۶}$$

اثبات: از روابطی که تا کنون بدست آورده ایم استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\begin{aligned}
(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\nu} &= g^{\mu\nu}{}_{,\nu}\sqrt{g} + g^{\mu\nu}(\sqrt{g})_{,\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta,\nu}\sqrt{g} + g^{\mu\nu}(\sqrt{g})_{,\nu} \\
&= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha\nu})\sqrt{g} + g^{\mu\nu}(\sqrt{g})_{,\nu} \\
&= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha\nu})\sqrt{g} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\nu}\sqrt{g}.
\end{aligned} \tag{۴۷}$$

دو جمله آخر به دلیل تقارن علائم کریستوفل نسبت به دو اندیس آخر، یکدیگر را حذف می کنند. در واقع دو جمله آخر را با صرف نظر از ضریب $\sqrt{g}$ می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta\alpha\nu} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\alpha\nu} = (-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\Gamma_{\beta\alpha\nu} \tag{۴۸}$$

که ادغام یک جمله پادمتقارن و یک جمله متقارن (نسبت به α,ν) است و بنابراین مساوی صفر است. به این ترتیب باقی می مانیم با:

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\nu} = -\Gamma^{\mu\nu}{}_{\nu}\sqrt{g} \tag{۴۹}$$

که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۴ قضایای گاووس و استوکس

در درس مقدماتی الکتریسیته و مغناطیس با دو قضیه گاوس و استوکس آشنا شده ایم. برای میدان های برداری سه بعدی این دو قضیه به شکل زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} &= \int_V dv\nabla\cdot\mathbf{A}\\ \int_{\partial S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} &= \int_S d\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}.\end{aligned} \tag{۵۰}$$

رابطه اول را به عنوان قانون گاوس و دومی را به عنوان قانون استوکس می شناسیم. در این روابط V یک حجم بسته، یک پارچه و محدود و ∂V مرز آن است. هم چنین S یک سطح دو بعدی دلخواه و یکپارچه و ∂S مرز آن است. در هر دو مورد نیز رابطه جهت انتگرال گیری روی سطح و حجم یا روی سطح و مرز آن با قانون دست راست تعیین می شود. از آنجا که در درسهای مقدماتی الکتریسیته و مغناطیس این روابط را یادگرفته ایم به شرح و بسط بیشتر این روابط نمی پردازیم. تنها به این ذکر این نکته اکتفا می کنیم که این قضایا در حالت کلی یعنی برای هر خمینه دلخواه با هر متریکی و در هر بعدی معتبر هستند. این رابطه را از این به بعد رابطه استوکس یا قضیه استوکس می نامیم. در واقع در درس مربوط به خمینه های دیفرانسیل نشان داده می شود که برای برقراری قضیه استوکس حتی نیازی به این نیست که خمینه دارای یک متریک باشد و تنها کافی است که یک المان حجم روی آن تعریف شده باشد. ولی ما در این بخش به این ظرایف نمی پردازیم و فرض می کنیم که با یک خمینه ریمانی با متریک $g_{\mu\nu}$ سروکار داریم. روی این خمینه مشتق هموردای یک میدان برداری A_μ به شکل زیر بدست می آید:

$$A^\mu_{;\mu} = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu}A^\nu = A^\mu_{,\mu} + \sqrt{g}^{-1}\sqrt{g}_{,\nu}A^\nu. \tag{۵۱}$$

اگر طرفین را در $\sqrt{g}$ ضرب کنیم، این رابطه را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A^\mu_{;\mu}\surd = (A^\mu\surd)_{,\mu} \tag{۵۲}$$

حال می توان انتگرال دو طرف این رابطه را روی یک زیرخمینه ریمانی Ω

$$\int_\Omega A^\mu_{;\mu}\surd d^4x = \int_\Omega (A^\mu\surd)\ _{,\mu}d^4x \tag{۵۳}$$

نوشت. اگر در طرف راست از قضیه استوکس استفاده کنیم می توانیم بنویسیم:

$$\int_\Omega A^\mu_{;\mu}\surd d^4x = \int_{\partial\Omega}(A^\mu\surd)d^3x, \tag{۵۴}$$

که در آن $\partial\Omega$ مرز ناحیه Ω است. حال فرض کنید که با میدان برداری ای سروکار داریم که در شرط $A^{\mu}_{;\mu} = 0$ صدق می کند. در این صورت از رابطه ی (۵۲) بدست می آوریم:

$$(A^{\mu}\surd)_{,\mu} = 0. \qquad (۵۵)$$

این رابطه چیزی نیست جز یک قانون پیوستگی برای چاربردار $A^{\mu}\surd = (A^0\surd, \mathbf{A}\surd)$ با چگالی $\rho; = A^0\surd$ و جریان $\mathbf{J} := \mathbf{A}\surd$، که به صورت صریح زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad (۵۶)$$

نوشته می شود. این رابطه بیان می کند که برای هر حجم بسته ای مثل V می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\int_V A^0\surd dv = -\int_{\partial V}\mathbf{A}\surd\cdot d\mathbf{s}. \qquad (۵۷)$$

آنچه که برای بردارها گفتیم برای تانسورها، دیگر صحیح نیست. دلیل اش هم این است که مشتق هموردای یک تانسور مرتبه دو یا بالاتر از رابطه ای شبیه به رابطه (۵۲) پیروی نمی کند. اما در یک حالت خاص ممکن است چنین رابطه ای برقرار باشد و آن وقتی است که تانسور مورد نظر ما پادمتقارن باشد. می دانیم که مشتق هموردای یک تانسور مثل $F^{\mu\nu}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$F^{\mu\nu}_{;\sigma} = F^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}F^{\mu\rho} \qquad (۵۸)$$

که در نتیجه آن می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}_{;\nu} &= F^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\rho}F^{\mu\rho} \\ &= F^{\mu\nu}_{,\nu} + \surd^{-1}\surd_{,\rho}F^{\mu\rho} \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

در سطر دوم از این استفاده کرده ایم که برای یک تانسور پادمتقارن جمله وسطی برابر با صفر است (زیرا $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ نسبت به دو اندیس پایین خود متقارن است و ادغام آن با $F^{\rho\nu}$ صفر می شود). بنابراین با ضرب کردن طرفین در رابطه بالا در $\surd$ می توانیم بنویسیم:

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}\surd = (F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} \qquad (۶۰)$$

بنابراین برای تانسورهای پادمتقارن نیز می توانیم همان روندی که برای بردارهای طی کردیم طی کنیم و در صورتی که رابطه $F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ برقرار باشد، به ترتیب زیر به یک قانون پایستگی برسیم:

$$(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} = 0, \qquad (۶۱)$$

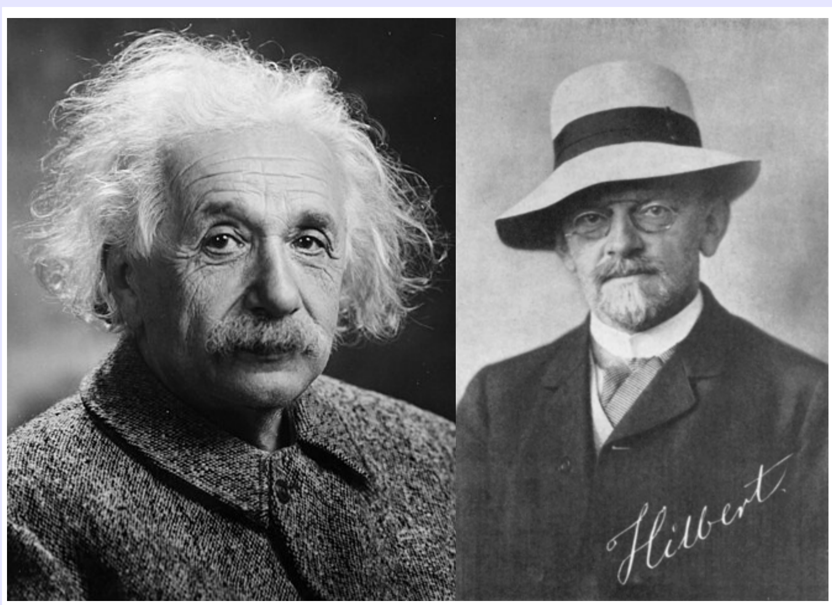
که یک قانون پایستگی برای چهار تا چاربردار مختلف است:

$$J^\mu = (\rho^{\mu 0}, \mathbf{J}^\mu) \tag{۶۲}$$

که در آن ها $\rho^\mu = F^{\mu 0}$ چگالی ها و $\mathbf{J}^\mu = (F^{\mu 1}, F^{\mu 2}, F^{\mu 3})$ بردارهای جریان هستند. برای هرکدام از این ها می توانیم بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^\mu \surd dv = -\int_{\partial V} \mathbf{J}^\mu \surd \cdot d\mathbf{s}. \tag{۶۳}$$

۵ کنش اینشتین ـ هیلبرت



شکل ۱: آلبرت اینشتین و دیوید هیلبرت

از سال ۱۹۱۲ تا ۱۹۱۵، اینشتین قسمت اعظم نظریه نسبیت عام را تدوین و در سلسله مقالاتی منتشر کرده بود. این که نظریه نسبیتی گرانش حتما می بایست بر اساس تانسورها نوشته شود، و اینکه این نظریه منجر به یک هندسه نااقلیدسی خواهد شد و متریک چنین فضایی به خم شدن نور در کنار یک جرم سنگین می انجامد، همگی در این فاصله توسط اینشتین ثابت شده بود. در ۱۹۱۵ مکاتبات گسترده و دیدارهایی بین اینشتین و هیلبرت که در آن زمان ریاضیدان بی همتایی بود، انجام شد. این دو همزمان و مستقل در باره شکل نهایی معادلات میدان کار می کردند. مقاله نهایی اینشتین که در آن معادلات میدان در حضور ماده را پیش نهاده بود در یک سلسله سخنرانی ها و نهایتا در مقاله ای از او در نوامبر ۱۹۱۵ منتشر شد. در همین زمان نیز دیوید هیلبرت مستقلاً معادلات میدان را با به کاربردن اصل وردش بدست آورد و مقاله اش را ۵ روز زودتر از اینشتین به مجله فرستاد. ولی انتشار نهایی مقاله هیلبرت تا اوایل ۱۹۱۶ به طول انجامید. امروزه در بین مورخان علم، جزییات این مکاتبات و دیدارها بین اینشتین و هیلبرت با علاقه دنبال می شود، اگرچه برای آن دو موضوع این که چه کسی زودتر معادلات نهایی را کشف کرده اهمیت چندانی نداشت. کنشی که با استفاده از اصل وردش می توان معادلات میدان نسبیت عام را از آن بدست آورد، کنش اینشتین‌ـ‌هیلبرت نامیده می شود.

آیا معادله اینشتین را می توان از وردش یک کنش بدست آورد؟ این همان سوالی است که هیلبرت پرسیده و موفق به یافتن پاسخ آن شده است. در این بخش نشان می دهیم که این کار ممکن است و کنش مربوطه را بدست می آوریم. فعلا برای سادگی معادله اینشتین را در غیاب ماده در نظر می گیریم. یک ناحیه دلخواه مثل Ω در فضاـ زمان را در نظر بگیرید و کنش زیر را روی آن تعریف کنید:

$$S[g]=\int_\Omega R\sqrt{g}d^4x. \tag{۶۴}$$

این کنش یک تابعی از متریک است، به همین دلیل آن را به صورت $S[g]$ نوشته ایم. در این صورت وردش S روی متریک ها به شرطی که در مرز ناحیه Ω متریک $g_{\mu\nu}$ و مشتقات آن تغییر نکنند، منجر به معادله اینشتین خواهد شد. این چیزی است که باید اکنون نشان دهیم. نخست توجه می کنیم شکل تانسوری ریچی چنین است:

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\Gamma^\rho{}_{\sigma\rho}+\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}. \tag{۶۵}$$

در این تانسور، دو جمله اول شامل مشتقات درجه دوم متریک و دو جمله بعدی شامل مشتقات درجه اول متریک هستند. بنابراین اسکالر ریچی را به صورت تفاضل دو جمله می نویسیم:

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R^*-L \tag{۶۶}$$

که در آن

$$R^*=g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu,\sigma}) \tag{۶۷}$$

شامل مشتقات درجه دوم متریک و

$$L=g^{\mu\nu}({\Gamma^{\sigma}}_{\mu\nu}{\Gamma^{\rho}}_{\sigma\rho}-{\Gamma^{\rho}}_{\mu\sigma}{\Gamma^{\sigma}}_{\nu\rho}) \tag{۶۸}$$

شامل مشتقات درجه اول متریک هستند. فایده این جدا سازی این است که شاید بتوانیم انتگرال جمله اول را به صورت یک انتگرال مرزی بنویسیم که وردش آن صفر باشد. در واقع در قدم اول نشان خواهیم داد که با صرف نظر کردن از آن مشتقات کامل، و صرف نظر از یک ضریب عددی، کنش را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S=\int L\sqrt{g}d^4x. \tag{۶۹}$$

در قدم دوم نیز نشان خواهیم داد که وردش این کنش نسبت به متریک منجر به معادله اینشتین می شود. به ترتیب این دو مرحله را انجام می دهیم.

۱.۵ قدم اول

پس از ضرب کردن R^* در $\sqrt{g}$ کاری می کنیم که دو جمله اول به صورت مشتقات کامل در آیند:

$$R^*\sqrt{g}=\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\sqrt{g}\right)_{,\nu}-\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\sqrt{g}\right)_{,\sigma}-(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}+(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \tag{۷۰}$$

از جملات اول و دوم که مشتق کامل هستند، صرف نظر می کنیم . در نتیجه خواهیم داشت:

$$R^*\sqrt{g}=-(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\nu}{\Gamma^{\sigma}}_{\mu\sigma}+(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{,\sigma}{\Gamma^{\sigma}}_{\mu\nu}. \tag{۷۱}$$

حال از روابطی که قبلا ثابت کرده ایم یعنی روابط

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{g})_{\ ,\nu}=-\Gamma^{\mu\nu}_{\ \ \nu}\sqrt{g}\qquad,\qquad \sqrt{g}_{\ ,\nu}={\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}\sqrt{g} \tag{۷۲}$$

و هم چنین رابطه $g^{\mu\nu}_{,\sigma}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta,\sigma}$ استفاده می کنیم و عبارت (۷۱) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} R^*\sqrt{g} &= ({\Gamma^{\mu\nu}}_{\nu}\sqrt{g}){\Gamma^{\sigma}}_{\mu\sigma}+(g^{\mu\nu}_{,\sigma}\sqrt{g}+g^{\mu\nu}\sqrt{g}_{\ ,\sigma}){\Gamma^{\sigma}}_{\mu\nu} \\ &= {\Gamma^{\mu\nu}}_{\nu}\sqrt{g}{\Gamma^{\sigma}}_{\mu\sigma}+\big(-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta,\sigma}\sqrt{g}+g^{\mu\nu}{\Gamma^{\alpha}}_{\alpha\sigma}\sqrt{g}\big){\Gamma^{\sigma}}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{۷۳}$$

حال از رابطه

$$g_{\alpha\beta,\sigma}=\Gamma_{\alpha\beta\sigma}+\Gamma_{\beta\alpha\sigma}$$

استفاده می کنیم و برای ساده کردن اولین جمله داخل پرانتز در طرف راست (۷۳) می نویسیم:

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta,\sigma} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma}) = \Gamma^{\mu\nu}_{\sigma} + \Gamma^{\nu\mu}_{\sigma} \tag{۷۴}$$

در نتیجه رابطه (۷۳) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} R^*\sqrt{g} &= \Big(\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma} - (\Gamma^{\mu\nu}_{\sigma} + \Gamma^{\nu\mu}_{\sigma})\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\Big)\sqrt{g} \\ &= (\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma} - 2\Gamma^{\mu\nu}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\Big)\sqrt{g}. \end{aligned} \tag{۷۵}$$

با تغییر نام اندیس ها متوجه می شویم که جمله اول و سوم داخل پرانتز یکسان هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$R^*\sqrt{g} = 2(\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\mu\nu}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu})\sqrt{g} \tag{۷۶}$$

اما طرف راست عبارت بالا چیزی نیست جز $2L\sqrt{g}$. بنابراین کنش اینشتین‌ـ‌هیلبرت متناسب است با:

$$S = \int_{\Omega} L\sqrt{g}d^4x = \int g^{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\Big)\sqrt{g}d^4x \equiv \int (A-B)d^4x. \tag{۷۷}$$

۲.۵ قدم دوم: محاسبه وردش کنش

حال وردش دو جمله بالا را حساب می کنیم. وردش جمله اول به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta A = \delta(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g}) = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta(\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g}) + \delta(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g} \tag{۷۸}$$

در جمله اول از این که $\Gamma^{\beta}_{a\beta}\sqrt{g} = \sqrt{g}\ _{,\alpha}$ استفاده می کنیم و جمله دوم را هم باز می کنیم تا برسیم به

$$\delta A = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\ _{,\alpha}) + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\big[\delta(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{g}) - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\big] \tag{۷۹}$$

حال در جمله دوم طرف راست از این استفاده می کنیم که $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{g} = -(g^{\alpha\nu}\sqrt{g})\ _{,\nu}$ و به رابطه زیر می رسیم:

$$\delta A = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\ _{,\alpha}) + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\big[-\delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{g})\ _{,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\big] \tag{۸۰}$$

وردش جمله دوم هم به طریق مشابه حساب می شود:

$$\delta B = \delta(\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g}) = \delta(\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha})\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\delta(\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta})g^{\mu\nu}\sqrt{g} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) \tag{۸۱}$$

ولی با تغییر نام اندیس ها می فهمیم که دو جمله اول در واقع با هم مساوی هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\delta B &= 2\delta({\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}){\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{g}+{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}{\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\\
&= {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[2\delta({\Gamma^\beta}_{\mu\alpha})g^{\mu\nu}\sqrt{g}+{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]\\
&= {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[2\delta({\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{g})-2{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})+{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]\\
&= {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[2\delta({\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{g})-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]\\
&= {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[2\delta(\Gamma^{\beta\nu}_{\ \ \alpha}\sqrt{g})-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big].
\end{aligned} \tag{۸۲}$$

حال با توجه به تقارن جمله اول نسبت به تعویض اندیس های ν و β و با استفاده از این رابطه که $\Gamma^{\beta\nu}_{\ \ \alpha}+\Gamma^{\nu\beta}_{\ \ \alpha}=-g^{\beta\nu}_{\ \ ,\alpha}$ عبارت δB را به شکل زیر درآوریم:

$$\delta B={\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[-\delta(g^{\beta\nu}_{\ \ ,\alpha}\sqrt{g})-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]. \tag{۸۳}$$

سپس در جمله اول از این استفاده می کنیم که

$$(g^{\beta\nu}\sqrt{g})_{\ ,\alpha}=g^{\beta\nu}_{,\ \alpha}\sqrt{g}+g^{\beta\nu}(\sqrt{g})_{\ ,\alpha}$$

و عبارت نهایی B را به شکل زیر در می آوریم:

$$\delta B={\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[-\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g})_{,\alpha}+\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g}_{,\alpha})-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]. \tag{۸۴}$$

حال عبارت (۸۴) را از (۸۰) کم می کنیم و می رسیم به:

$$\begin{aligned}
\delta(A-B) &= {\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}_{\ ,\alpha})+{\Gamma^\beta}_{\alpha\beta}\big[-\delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{g})_{\ ,\nu}-{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\big]\\
&- {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[-\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g})_{,\alpha}+\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g}_{,\alpha})-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big].
\end{aligned} \tag{۸۵}$$

جملات اول و پنجم یکدیگر را حذف می کنند و باقی می مانیم با:

$$\delta(A-B)={\Gamma^\beta}_{\alpha\beta}\big[-\delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{g})_{\ ,\nu}-{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\big]-{\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\Big[-\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g})_{,\alpha}-{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})\Big]. \tag{۸۶}$$

پس از جابجایی جملات دوم و سوم خواهیم داشت:

$$\delta(A-B)=-{\Gamma^\beta}_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{g})_{\ ,\nu}+{\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g})_{,\alpha}-{\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g})+{\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}). \tag{۸۷}$$

در جملات اول و دوم می توانیم مشتق ها روی Γ ها قرار دهیم، زیرا تفاوتی که ایجاد می شود یک مشتق کامل است. بنابراین می نویسیم:

$$\delta(A-B) = {\Gamma^\beta}_{\alpha\beta\ ,\nu}\delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{g}) - {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta,\ \alpha}\delta(g^{\beta\nu}\sqrt{g}) - {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) + {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}). \qquad (۸۸)$$

پس از نامگذاری دوباره اندیس ها و یکنواخت کردن آنها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta L \equiv \delta(A-B) &= {\Gamma^\beta}_{\mu\beta\ ,\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) - {\Gamma^\alpha}_{\nu\mu,\ \alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) - {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) + {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) \\ &= \Big[{\Gamma^\beta}_{\mu\beta\ ,\nu} - {\Gamma^\alpha}_{\nu\mu,\ \alpha} - {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\alpha}_{\mu\nu} + {\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha}\Big]\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) = R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) \qquad (۸۹)\end{aligned}$$

به این ترتیب به نتیجه نهایی می رسیم و آن اینکه معادله اینشتین در غیاب ماده یعنی

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

را می توان از کنش زیر موسوم به کنش اینشتین ـ هیلبرت

$$S[g] = \int R\sqrt{g}d^4x. \qquad (۹۰)$$

بدست آورد. در درس گذشته دیدیم که معادله اینشتین در غیاب ماده را به صورت $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$ هم می توان نوشت. حال می پرسیم آیا کنش اینشتین ـ هیلبرت مستقیما به این شکل از معادله اینشتین نیز منتهی شود؟ پاسخ این سوال مثبت است. کافی است به دو اتحاد زیر که در همین درس آنها را ثابت کرده ایم توجه کنیم:

$$\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \qquad , \qquad \delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \qquad (۹۱)$$

در این صورت با کمی محاسبه می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) &= R_{\mu\nu}\big[(\delta g^{\mu\nu})\sqrt{g} + g^{\mu\nu}\delta(\sqrt{g})\big] \\ &= R_{\mu\nu}\big[-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{g} + g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\big] \\ &= -\big[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\big]\sqrt{g}\delta g_{\alpha\beta}. \qquad (۹۲)\end{aligned}$$

همانطور که در ابتدا گفتیم کنش $S[g] = \int R\sqrt{g}d^4x$ تنها منجر به معادله اینشتین در خلاء می شود. برای آنکه معادله اینشتین را در حضور ماده، یا در حضور ماده باردار، در حضور میدان الکترومغناطیسی و نظایر آن از یک کنش بدست آوریم، باید به این کنش جملاتی اضافه کنیم. این کاری است که ما در این درس مقدماتی انجام نمی دهیم. اما خواننده علاقمند می تواند به کتاب های نسبیت عام مراجعه کند. یک مرجع خوب ولی فشرده کتاب دیراک است. [۵]

[5] P.A.M. Dirac, General Theory of Relativity, Wiley,1975